Научная статья
УДК 517.54+515.12+519.172
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-5-17

О САМОПОДОБНЫХ ДЕНДРИТАХ С ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ КОПИЙ ПО ПОЛИГОНАЛЬНЫМ ДЕРЕВЬЯМ

Клара Бекиммат кизи Аллабергенова

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

k.allabergenova@alumini.nsu.ru

Аннотация

В статье описывается алгоритм построения на плоскости самоподобных дендритов, копии которых пересекаются по полигональному дереву.

Ключевые слова и фразы

самоподобный дендрит, OSC, элементарный циппер, R-симметричная система, граф пересечений системы.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева (проект FWNF-2022-0005)

Для цитирования

Аллабергенова К.Б. О самоподобных дендритах с пересечением копий по полигональным деревьям // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 2, С. 5-17. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-5-17

On self-similar dendrites whose copies intersect along polygonal trees

Klara B. Allabergenova

Novosibirsk state university,
Novosibirsk, Russia

k.allabergenova@alumini.nsu.ru

Abstract

The article proposes an algorithm for constructing self-similar dendrites in plane whose copies intersect along a polygonal tree.

Keywords

self-similar dendrite, OSC, elementary zipper, R-symmetric system, intersection graph of the system.

Funding

The work is done within framework of state contract of Sobolev institute of mathematics (project FWNF-2022-0005)

For citation

Allabergenova K. B. On self-similar dendrites whose copies intersect along polygonal trees // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N 2, P. 5-17. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-5-17

§ 1. Введение и постановка задачи

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$. Непустое компактное множество, удовлетворяющее равенству $K = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K)$ называется *самоподобным множеством* или *аттрактором* системы $\mathcal{S}$ [1].

Равенство $T(A) = S_1(A) \cup S_2(A) \cup \cdots \cup S_m(A)$ задает *оператор Хатчинсона* системы $\mathcal{S}$, который является сжимающим отображением пространства $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ всех компактных непустых подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

Дендритом называется локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых кривых.

В своей работе [2] М. Хата доказал, что множество концевых точек нетривиального самоподобного дендрита имеет бесконечную мощность. Дж. Кигами [7] исследовал метрику кратчайшего пути в посткритически конечных самоподобных дендритах и построил правильные формы Дирихле для таких дендритов. Эквивалентность между множествами Жюлиа, являющимися дендритами и самоподобными дендритами с двумя образующими, послужила мотивацией для публикации статей [4, 12, 10, 14]. Статья [4] К. Бандта и К. Келлера заслуживает особого внимания, поскольку она содержит критерий графа пересечений, для того, чтобы конечно разветвленный самоподобный континуум являлся дендритом. Статья [3] К. Бандта и Й. Штанке выражает внутреннее расстояние на дендритах в терминах метрики кратчайших путей. Из нее можно также вывести идею главного дерева для посткритически конечных самоподобных дендритов. В статье [15] рассмотрены определение G-симметричных полигональных систем и изучены свойства симметричных дендритов, которые являются их аттракторами. Это позволило найти условия, при которых аттрактор циппера является дендритом. В работе [17] показано существование класса самоподобных дендритов с бесконечным порядком ветвления в гильбертовом пространстве. Доказано, что их размерность совпадает с размерностью подобия, а мера Хаусдорфа в этой размерности равна нулю.

Условие открытого множества (OSC) для системы подобий $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ заключается в существовании такого открытого множества O, что $S_i(O) \subset O$ и $S_i(O) \cap S_j(O) = \varnothing$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, m\}, i \neq j$. Известно несколько эквивалентных формулировок OSC [5, 6]. Однако не всегда легко проверить, удовлетворяет ли данная система подобий $\mathcal{S}$ OSC или нет.

Пересечение копий самоподобного множества может быть различной природы. Было доказано К. Бандтом и Х. Рао в [11], что любой самоподобный континуум на плоскости, обладающий свойством конечного пересечения, удовлетворяет OSC. До 2023 года не было известно, существует ли самоподобный дендрит, удовлетворяющий условию открытого множества на плоскости, копии которого пересекаются по нетривиальному самоподобному поддендриту. В работе [16] рассматривался именно этот вопрос, и нами был получен положительный результат. В случае, когда система $\mathcal{S}$ удовлетворяет OSC, пересечение копий дендрита $K(\mathcal{S})$ является односвязным и имеет нулевую меру в K. Следовательно, такое пересечение является поддендритом в K. Этот поддендрит может быть жордановой дугой или самоподобным дендритом [16]. Но всё же оставался открытым вопрос о том, могут ли копии самоподобного дендрита пересекаться по конечному дереву. Настоящая работа отвечает на этот вопрос. Для любого дерева γ, составленного из конечного числа прямолинейных отрезков, существует самоподобный дендрит на плоскости, пара копий которого пересекается по множеству, которое есть образ заданного дерева γ относительно некоторого подобия.

§ 2. Предварительные сведения и результаты

2.1 Самоподобные множества

Определение 1. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$. Существует единственный непустой компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ такой, что

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K).$$

Тогда множество K также называют *самоподобным относительно* $\mathcal{S}$, или *аттрактором* системы $\mathcal{S}$.

Равенство $T(A) = S_1(A) \cup S_2(A) \cup \cdots \cup S_m(A)$ задает оператор Хатчинсона системы $\mathcal{S}$, который является сжимающим отображением пространства $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ всех компактных непустых подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Согласно теореме Хатчинсона, аттрактор K однозначно определяется через $\mathcal{S}$, и для любого компактного A последовательность множеств $T^n(A)$ сходится к K.

Пусть $I = \{1, \ldots, m\}$ — множество индексов системы $\mathcal{S}$, тогда $I^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I^n$ — множество всех слов $\mathbf{i} = i_1 \ldots i_n$ конечной длины в алфавите I, называемых *мультииндексами.* Мы будем использовать обозначение $S_{\mathbf{j}} = S_{j_1 j_2 \ldots j_n} = S_{j_1} S_{j_2} \ldots S_{j_n}$, а для аттрактора K обозначать $S_{\mathbf{j}}(K)$ через $K_{\mathbf{j}}$.

Индексным пространством будем называть множество всех строк (слов бесконечной длины) $I^\infty = \{\boldsymbol{\beta} = \beta_1\beta_2 \ldots,\ \beta_i \in I\}$. Отображение $\pi : I^\infty \to K$, сопоставляющее последовательности $\boldsymbol{\beta}$ в точку $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_{\beta_1 \ldots \beta_n} = x$ называется *индексной параметризацией* аттрактора K. Тогда для $x \in K$ прообраз $\pi^{-1}(x)$ есть множество адресов точки x.

Определение 2. Система $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию открытого множества (OSC), если существует такое открытое множество O, что для любых $S_i, S_j \in \mathcal{S}$, $S_i(O) \subset O$ и $S_i(O) \cap S_j(O) = \varnothing$ при $i \neq j$.

Определение 3. Если аттрактор K системы $\mathcal{S}$ связен и для любых $i \neq j \in I$ число $\#(K_i \cap K_j) \leqslant 1$, то говорят, что K — *самоподобный континуум, удовлетворяющий условию одноточечного пересечения.*

Определение 4. Пусть $\mathcal{S}$ — система с одноточечным пересечением. *Граф пересечений* $\Gamma(\mathcal{S})$ системы $\mathcal{S}$ — это двудольный граф $(\{K_i\}, \{p_j\}; E)$ с множеством ребер E, для которого K_i и p_j соединены ребром, если $p_j \in K_i$.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 5-17
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 5-17

Определение 5. Пусть X — полное метрическое пространство. Система $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих отображений X в себя называется *циппером* с вершинами $\{z_0, \dots, z_m\}$ и сигнатурой $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, если $S_i(z_0) = z_{i-1+\varepsilon_i}$ и $S_i(z_m) = z_{i-\varepsilon_i}$ для $i = 1, \dots, m$. Циппер с вершинами $\{0, 1/m, 2/m, \dots, 1\}$ называется *элементарным циппером.*

В качестве критерия связности аттрактора K системы $\mathcal{S}$ мы используем следующую теорему [9]:

Теорема 1. *Пусть K — аттрактор системы сжимающих отображений $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) для каждого $i, j \in I$ существует $\{i_0, i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ такое, что $i_0 = i, i_n = j$ и $K_{i_k} \cap K_{i_{k+1}} \neq \varnothing$ для каждого $k = 0, 1, \dots, n-1$;

(2) K линейно связен;

(3) K связен;

(4) K локально связен.

2.2 Дендриты

Определение 6 (Charatonik J., Charatonik W., [8])**.** Дендритом называется локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых кривых.

Обозначим через $Ord(q, X)$ порядок континуума X в точке $q \in X$ [13]. Для дендритов порядок точек ветвления равен числу компонент $X \setminus \{q\}$. Точки порядка один в континууме X называются *концами* X, точки с порядком два называются *разбивающими точками.* Точки, порядок которых больше двух, называются *точками ветвления* X.

Согласно [8, теорема 1.1], для континуума X эквивалентны следующие условия:

1) X — дендрит;

2) любые две различные точки в X разделяются третьей;

3) всякая точка $p \in X$ — либо конец, либо разбивающая точка;

4) всякий невырожденный подконтинуум в X содержит несчетное множество разбивающих точек в X;

5) для любого $p \in X$ число компонент $X \setminus p$ равно $Ord(x, P)$ (если одно из них конечно);

6) пересечение любых двух связных подмножеств в X связно;

7) X односвязно, и для любых двух точек $x, y \in X$ существует единственная кривая γ, соединяющая x и y.

Самоподобный дендрит — это самоподобный континуум, который является дендритом.

Мы будем пользоваться следующей теоремой:

Теорема 2 (Tetenov A., Yudin I., Kadirova M., [18])**.** *Если $\mathcal{S}$ — система с одноточечным пересечением, а ее граф пересечений $\Gamma(\mathcal{S})$ является деревом, то ее аттрактор K является дендритом.*

Данная теорема была доказана в статье [18] для граф-ориентированных систем.

§ 3. R-симметричные системы

Пусть $R(x, y) = (1-x, -y)$ — поворот на $180°$ относительно точки $1/2$. Пусть D — область, такая что $\bar{D} \cap \mathbb{R} = [0, 1]$. Мы говорим, что область D *R-симметрична* если $D = R(D)$.

Определение 7. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ — система сжимающих отображений и пусть K — аттрактор этой системы. Если для любого $i \in I$, существует $j \in I$ такое, что $R \cdot S_i = S_j \cdot R$, то система $\mathcal{S}$ называется R-симметричной.

Лемма 1. *Если $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ является R-симметричной системой, тогда система $\mathcal{S}^{(n)} = \{S_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in \mathbf{I^n}\}$ также является R-симметричной системой.*

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ — R-симметричная система с аттрактором K. Тогда $R(K) = K$ и для любой системы $\mathcal{S}' = \{S_i \cdot R^{\varepsilon_i}, i \in \{1, ..., l\}, \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$, K есть аттрактор системы $\mathcal{S}'$.*

Доказательство. Из того, что $R(K) = R(\bigcup\limits_{j=1}^{l} S_j(K)) = \bigcup\limits_{j=1}^{l} S_j \cdot R(K)$ следует, что $R(K) = K$. Следовательно, K есть аттрактор системы $\mathcal{S}'$. $\square$

Определение 8. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ — R-симметричная система. Система $\widetilde{\mathcal{S}} = \{S_i \cdot R, S_i, S_i \in \mathcal{S}\}$ называется *расширенной системой* для системы $\mathcal{S}$.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ — R-симметричная система, аттрактор K которой является дендритом. Пусть $\widetilde{\mathcal{S}}$ — расширенная система для системы $\mathcal{S}$. Тогда*

1) *Система $\widetilde{\mathcal{S}}$ имеет тот же аттрактор K, что и $\mathcal{S}$.*

2) *Если возьмем какую-то подсистему системы $\widetilde{\mathcal{S}}$ со связным аттрактором, то ее аттрактор также является дендритом.*

Доказательство. 1) Непосредственно следует из леммы 2.

2) Согласно [8, теорема 1.3], любое связное подмножество дендрита является дендритом.

□

Система $\widetilde{\mathcal{S}}$ порождает расширенную полугруппу $\mathfrak{G}(\widetilde{\mathcal{S}})$, порожденную всеми отображениями вида S_j и $S_j \cdot R$.

§ 4. О пересечении копий по полигональному дереву

(A1) Пусть G — область на плоскости, такая что $\bar{G} \cap \mathbb{R} = [0,1]$. Пусть $\mathcal{Z} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ — система отображений, порождающая элементарный циппер с сигнатурой $(0, \ldots, 0)$ на отрезке $[0,1]$. Пусть $J_i = (a_i, b_i)$, где $i \in \{m+1, \ldots, m+n\}$ — конечное множество направленных отрезков, длиной меньше чем единица, лежащих в G. Пусть S_i — сохраняющие ориентацию сжимающие подобия такие, что $S_i(0) = a_i$, $S_i(1) = b_i$, $i = m+1, \ldots, m+n$. Пусть $\bigcup\limits_{i=m+1}^{m+n} J_i \cup [0,1]$ связно. Более того, для любого $S_j \in \mathcal{S}$ множества $S_j(G)$ лежат в области G, и для любого $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ образы замыканий $S_i(\bar{G})$, $S_j(\bar{G})$ могут пересекаться только по точкам $S_i(0)$, $S_i(1)$, $S_j(0)$, $S_j(1)$.

Теорема 3. *Если система $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_{m+n}\}$ удовлетворяет условиям **(A1)**, то*

1) *Система сжимающих подобий $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_{m+n}\}$ удовлетворяет OSC;*

2) *Аттрактор K системы $\mathcal{S}$ лежит в $\bar{G}$;*

3) *Система $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию одноточечного пересечения;*

4) *Если $A = \bigcup\limits_{i=m+1}^{m+n} J_i \cup \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i[0,1]$ есть дерево, то K является дендритом.*

Доказательство. 1) В качестве открытого множества O в условии открытого множества мы рассмотрим множество G. По условию теоремы мы имеем, что $S_i(G) \subset G$. Более того, пересечение $S_i(\bar{G}) \cap S_j(\bar{G})$ одноточечное. Это означает, что $S_i(G) \cap S_j(G) = \varnothing$. Согласно определению 2, система $\mathcal{S}$ удовлетворяет требованиям OSC с открытым множеством G;

2) Пусть O — открытое множество из OSC. Поскольку $\bar{O} \supset T(\bar{O}) = \bigcup\limits_{i=1}^{m+n} S_i(\bar{O})$, убывающая последовательность множеств $T^k(\bar{O})$ сходится к K.

В частности, $\bar{O} \supset K$. Согласно утверждению 1) мы имеем, что $O = G$. Отсюда следует, что $\bar{G} \supset K$;

3) В самом деле, $K \subset \bar{G}$, $K_i \cap K_j \subset \bar{G}_i \cap \bar{G}_j$ при этом $K_i \cap K_j$ содержит не более одной точки;

4) Чтобы получить граф пересечений системы $\mathcal{S}$, нужно в качестве белых вершин взять копии $S_i(K)$, $S_j(K)$, которым соответствуют множества $S_i([0,1])$, $S_j([0,1])$, а в качестве черных — точки пересечения этих отрезков. При этом ребрами полученного двудольного графа являются полуребра графа, образованного отрезками $S_i([0,1])$, $S_j([0,1])$. Таким образом, граф пересечений системы $\mathcal{S}$ является деревом. Согласно теореме 2, K является дендритом. □

Пусть D — область, удовлетворяющая условию **(A1)** и R-симметрична, то есть $D = R(D)$. Обозначим через D^+ пересечение области D с верхней полуплоскостью, а через D^- пересечение области D с нижней полуплоскостью.

Замечание 1. В частности, теорема 3 верна для областей D и D^+.

Мы будем использовать следующие обозначения: $\bar{S}_i = R \cdot S_i$, $S_i^* = S_i \cdot R$.

Геометрический смысл этих обозначений заключается в следующем. Пусть $S_i : D^+ \to D_i^+$, то отображение $\bar{S}_i$ переводит область D_i^+ в область $D_i^- \subset D^-$ которая симметрична области D_i^+ относительно точки $1/2$. А отображение S_i^* переводит область D_i^+ в область $D_i^- \subset D^+$, которая симметрична области D_i^+ относительно точки $(a_i+b_i)/2$, где $a_i = S_i(0)$, $b_i = S_i(1)$.

Пусть $\gamma := \bigcup_{i=1}^n J_i$ — некоторое полигональное дерево, а α — наименьший угол между его ребрами, имеющими общую вершину. В дальнейшем в качестве области D^+ мы рассмотрим равнобедренную трапецию с острым углом меньшим, чем $\alpha/3$.

Теперь введем следующее условие.

(A2) Пусть $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_{14}\}$ — R-симметричная система, определяемая в R-симметричной области D, удовлетворяющая условиям **(A1)**, задаваемая с помощью отображений вида $S_1(x) = x/4$, $S_2(x) = x/4 + 1/4$, $S_3(x) = x/4 + 1/2$, $S_4(x) = x/4 + 3/4$, $S_i(z) = (b_i - a_i)z + a_i$, где $i \in 5, \ldots, 14$ и $0 < a_i < 1$, $0 < b_i < 1$.

Пусть система $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям **(A2)**. Рассмотрим систему $\mathcal{S} = \mathcal{F} \cup \{S_i^*\}_{i=9}^{14}$. Пусть $D_0 := \bigcup\limits_{i=1}^{14} S_i(D) \cup \bigcup\limits_{i=9}^{14} S_i^*(D)$, $T(K) = \bigcup\limits_{i=1}^{14} S_i(K)$, где K — аттрактор системы $\mathcal{S}$.

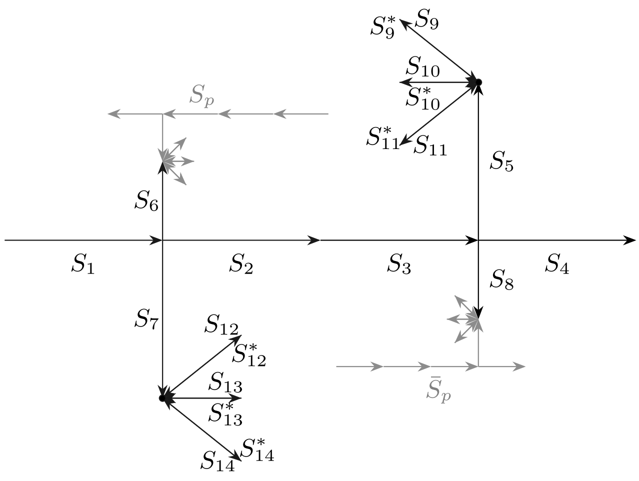

Рис. 1: Система $\mathcal{S} \cup \{S_p, \bar{S}_p\}$

Лемма 3. *Пусть система задана условиями (A2), а K — ее аттрактор. Пусть подобие S_p таково, что $S_p(\bar{D}) \cap \bar{D}_0 = \{x_0\}$, $S_p(K) \cap T(K) = \{x_0\}$. Тогда аттрактор K' системы $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{S_p, \bar{S}_p\}$ является дендритом.*

Доказательство. Так как по условию теоремы $S_p(\bar{D}) \cap \bar{D}_0 = \{x_0\}$ и область D симметричная, то мы имеем, что $\bar{S}_p(\bar{D}) \cap \bar{D}_0 = \{R(x_0)\}$. Поскольку $K \subset \bar{D}$, то $S_i(K), S_p(K), \bar{S}_p(K) \subset \bar{D}$ а это означает, что $S_p(K) \cap \bar{D}_0 = \{x_0\}$ и $\bar{S}_p(K) \cap \bar{D}_0 = \{R(x_0)\}$. Отсюда следует, что для любых различных i и j пересечения $S_i(K) \cap S_j(K)$, $\bar{S}_i(K) \cap \bar{S}_j(K)$ не более чем одноточечные.

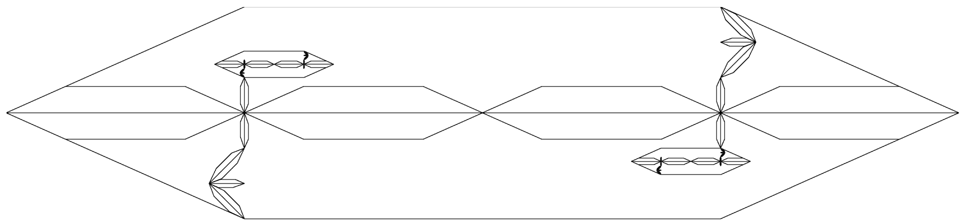

Рис. 2: Пересечение $S_p(\bar{D}) \cap \bar{D}_0$

Чтобы получить граф пересечений системы $\mathcal{S}$, нужно в качестве белых вершин взять копии $S_i(K)$, $\bar{S}_j(K)$, которым соответствуют множества $S_i([0,1])$, $\bar{S}_j([0,1])$, а в качестве черных — точки пересечения этих отрезков. При этом ребрами полученного двудольного графа являются полуребра графа, образованного отрезками $S_i([0,1])$, $\bar{S}_j([0,1])$. Мы также добавим к полученному дереву еще две черные вершины, соответствующие точкам x_0, $R(x_0)$ и две белые вершины, соответствующие $S_p(K)$, $\bar{S}_p(K)$ и объединим их ребрами. Таким образом, граф пересечений $\Gamma(\mathcal{S}')$ системы $\mathcal{S}'$

является деревом. Согласно теореме 2, аттрактор K' системы $\mathcal{S}'$ является дендритом. $\square$

Рассмотрим систему $\mathcal{S}_0 = \{S_1, \dots, S_{12}\}$ которая определена в области D^+, задаваемую с помощью отображений вида $S_1(x) = x/4$, $S_2(x) = x/4 + 1/4$, $S_3(x) = x/4 + 1/2$, $S_4(x) = x/4 + 3/4$, $S_i(z) = (b_i - a_i)z + a_i$, где $i \in 5, \dots, 12$ и $0 < a_i < 1$, $0 < b_i < 1$. Пусть $\mathcal{S}_0$ удовлетворяет условиям **(A1)**. Пусть $D_0^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{12} S_i(D^+)$, $T(K_0) = \bigcup\limits_{i=1}^{12} S_i(K_0)$, где K_0 — аттрактор системы $\mathcal{S}_0$.

Теорема 4. *Для системы $\mathcal{S}_0$ существует такое отображение S_p, что каждое из пересечений $S_p(\bar{D}^+) \cap \bar{D}_0^+$, $T(K_0) \cap S_p(T(K_0))$ является полигональным деревом. При этом аттрактор K системы $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \{S_p\}$ является дендритом.*

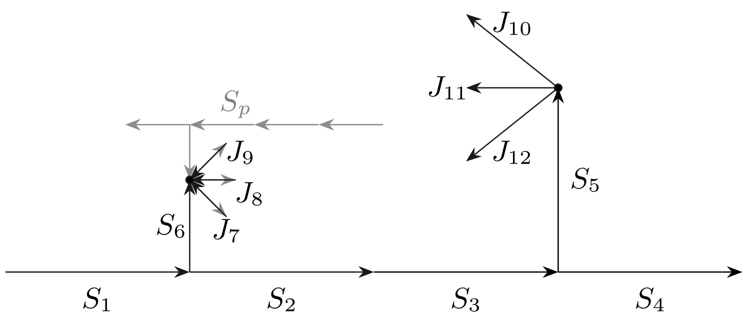

Рис. 3: Система $\mathcal{S} \cup \{S_p\}$

Доказательство. Пусть $\gamma = J_{10} \cup J_{11} \cup J_{12}$ — полигональное дерево, где $J_i = [a_i, b_i]$. Обозначим через $\gamma' = J_7 \cup J_8 \cup J_9$, где $J_{k-2} = rJ_k$, $k = 10, 11, 12$, $r \in (0, 1)$. Отметим, что отрезки J_7, J_8, J_9 ориентированы в противоположную сторону. Ясно, что $\gamma' = r\gamma$. Пусть S_p отображение такое, что $S_p(\gamma) = \gamma'$. Отображение S_p явном виде определим следующим образом: $S_p(z) = re^{i\pi}z + \vec{c}$, где $\vec{c} = (\frac{1}{4} + \frac{r}{3}tg\frac{\alpha}{3}, r + a_6)$.

Система R-симметричная $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_{14}\}$ удовлетворяет условиям **(A2)**. Рассмотрим систему $\mathcal{S}' = \mathcal{F} \cup \{S_i^*\}_{i=9}^{14} \cup \{S_p, \bar{S}_p\}$. Ясно, что эта система также является R-симметричной. Пусть $\widetilde{\mathcal{S}'}$ является расширенной системой (см. определение 8) для системы $\mathcal{S}'$. Согласно предложению 1, система $\widetilde{\mathcal{S}'}$ имеет такой же аттрактор K', как у системы $\mathcal{S}'$. Поскольку $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S} \subset \widetilde{\mathcal{S}'}$, следовательно, $K_0 \subset K \subset K'$. А согласно лемме 3 мы имеем, что K' дендрит.

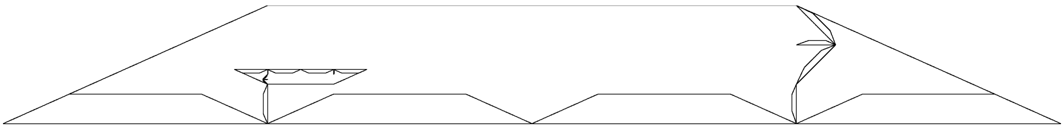

Рис. 4: Пересечение $S_p(\bar{D}^+) \cap \bar{D}_0^+$

Из того, что $S_p : \bar{D}_0^+ \to r\bar{D}_0^-$ и $S_p(\gamma) = \gamma'$, следует, что
$\bigcup\limits_{i=1}^{12} S_i(\bar{D}_0^+) \cap S_p(\bigcup\limits_{i=1}^{12} S_i(\bar{D}_0^+)) = \bigcup\limits_{i=1}^{12} S_i(K_0) \cap S_p(\bigcup\limits_{i=1}^{12} S_i(K_0)) = \gamma'$.

По условию **A2)** аттрактор K_0 системы $\mathcal{S}_0$ является связным, более того, пересечение $S_p(K_0)$ и K_0 не пусто. Отсюда следует, что аттрактор K системы $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \{S_p\}$ является связным. Так как аттрактор K является связным подмножеством аттрактора K', из условия 2) предложения 1 следует, что K является дендритом. □

Следствие 1. *Пусть K аттрактор системы $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \{S'\}$, то $K_2 \cap S'(K)$ является деревом, где $S' = S_2 S_p$.*

Список литературы

1. *Hutchinson J. E.* Fractals and self-similarity // *Indiana Univ. Math. J.* 1981. V. 30, № 5. P. 713–747.

2. *Hata M.* On the structure of self-similar sets // *Japan Journal of Applied Mathematics*. 1985. V. 2, P. 381–414.

3. *Bandt C. and Stahnke J. Self-similar sets 6. Interior distance on deterministic fractals* / Preprint, 1990.

4. *Bandt C. and Keller K.* Self-similar Sets 2. A Simple Approach to the Topological Structure of Fractals // *Mathematische Nachrichten*. 1991. V. 154, N. 1, P. 27–39.

5. *Bandt C., Graf S.* Self-similar Sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure // *American mathematical society*. 1992. V. 114, № 4. P. 995–1001.

6. *Schief A.* Separation properties for self-similar sets // *American mathematical society*. 1994. V. 122, P. 111–115.

7. *Kigami J.* Harmonic Calculus on Limits of Networks and Its Application to Dendrites // *Journal of Functional Analysis*. 1995. V. 128, P. 48–86.

8. *Charatonik J. J. and Charatonik W. J.* Dendrites // *Aportaciones Mat. Comun.* 1998. V. 22, P. 227–253.

9. *Kigami J.* Analysis on Fractals // *Cambridge University Press*, 2001. Number 143.

10. *Solomyak B.* On the 'Mandelbrot set' for pairs of linear maps: asymptotic self-similarity // *Nonlinearity.* 2005. V. 18, P. 1927–1943.

11. *Bandt C. and Rao H.* Topology and separation of self-similar fractals in the plane // *Nonlinearity.* 2007. V. 20, P. 1463-1474.

12. *Eroğlu K. I. and Rohde S. and Solomyak B.* Quasisymmetric conjugacy between quadratic dynamics and iterated function systems // *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* 2009. V. 30, N. 6, P. 1665–1684

13. *Kuratowski K.* Topology: Volume II // *Publisher: Elsevier*, 2014.

14. *Sirvent V. F. and Thuswaldner J. M.* On the Fibonacci–Mandelbrot set // *Indagationes Mathematicae.* 2015. V. 26, N. 1, P. 174–190

15. *Samuel M. and Mekhontsev D. and Tetenov A.* On Dendrites Generated by Symmetric Polygonal Systems: The Case of Regular Polygons // *Trends in Mathematics. Springer International Publishing AG.* 2018. P. 27-35

16. *Allabergenova K., Samuel M., Tetenov A.* Intersections of the pieces of self-similar dendrites in the plane // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2024. V. 182.

17. *Allabergenova K., Kadirova M.* On self-similar dendrites in Hilbert space, // *Results in Nonlinear Analysis.* 2025 V. 8, N. 1, P. 184–192.

18. *Tetenov A., Yudin I. and Kadirova M.* Finiteness properties for self-similar continua, // *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S.*, 2025. doi: 10.3934/dcdss.2025057

Информация об авторе

Клара Бекиммат кизи Аллабергенова, аспирант
Scopus Author ID 58971644700

Author Information

Klara B. Allabergenova, graduate student

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 5-17
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 5-17

Scopus Author ID 58971644700

Статья поступила в редакцию 30.04.2025;
одобрена после рецензирования 08.05.2025; принята к публикации 11.06.2025

The article was submitted 30.04.2025;
approved after reviewing 08.05.2025; accepted for publication 11.06.2025